$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}+\ln 3-\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\Big)+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{1+b}{b-1}-\frac{1}{2}\ln 3\\
&= \frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3=0
\end{aligned}$$

bulunur.

(f) (7.21) den dolayı

$$\begin{aligned}
E.d.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{2}\Big)\frac{dx}{x\ln x}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\ln\mid\ln x\mid\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}+\ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\Big)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\ln\mid\ln(1-\varepsilon)\mid-\ln\mid\ln\frac{1}{2}\mid+\ln(\ln 2)-\ln(\ln(1+\varepsilon))\Big|\Big]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\Big|\ln\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\Big|
\end{aligned}$$

[$\varepsilon\to 0^+$ iken $\ln(1-\varepsilon)\sim-\varepsilon$ ve $\ln(1+\varepsilon)\sim\varepsilon$ olduğundan]

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\Big|\frac{-\varepsilon}{\varepsilon}\Big| = \lim_{\varepsilon\to 0^+}0=0$$

bulunur. ◇

7.5 Ek Problemler

(18) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; (b) $\int_1^{+\infty}\frac{x^4dx}{(x^5+1)^4}$;

(c) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$; (d) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$;

(e) $\int_1^{+\infty}\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$; (f) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin^2 bxdx\ (a>0)$;

(g) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$; (h) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$;

(i) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(1-x)}{\sqrt[3]{(1-x)^4}}dx$.

Cevap: (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $\frac{1}{120}$; (c) $2(1-\ln 2)$; (d) $\frac{1}{9}$; (e) $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$; (f) $\frac{2b^2}{a(a^2+4b^2)}$; (g) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; (h) 0 ; (i) $\frac{3\ln 2}{2} - \frac{\pi(3+2\sqrt{3})}{4}$.

(19) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int\limits_0^1 \frac{2-\sqrt[3]{x}-x^3}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; (b) $\int\limits_{-0,5}^{-0,25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;

(c) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}$; (d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cot x}dx$;

(e) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\arccos x}}$; (f) $\int\limits_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(g) $\int\limits_{-1}^1 x^3 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (h) $\int\limits_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx \ (b>a)$;

(i) $\int\limits_0^{\pi} x\ln(\sin x)dx$.

Cevap: (a) $\frac{625}{187}$; (b) $2(\ln\sqrt{2}-1)$; (c) $\frac{\pi}{\sqrt{15}}$; (d) $\sqrt{2}$; (e) $2\sqrt{\pi}$; (f) $\frac{7}{9}$; (g) $\frac{5\pi}{3}$; (h) $\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$; (i) $\frac{-(\pi^2\ln 2)}{2}$.

(20) Aşağıdaki integrallerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[4]{x^5+2}}dx$; (b) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$;

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}dx$; (d) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin(\frac{1}{x})}{1+x\sqrt{x}}dx$;

(e) $\int\limits_2^{+\infty} \cos(\frac{2}{x}-1)dx$; (f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{(x-\cos(\frac{\pi}{x}))^2}dx$;

(g) $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$; (h) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$;

(i) $\int\limits_{0}^{+\infty} (e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}})dx$; (j) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2}dx$;

(k) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2\sin^2 x}$.

Cevap: (a), (c), $(d), (e), (i)$ yakınsak, $(b), (f), (g), (h), (k)$ ıraksaktır.

(21) Aşağıdaki integrallerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{8-x^3}$; (b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$;

(c) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx$; (d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}}dx$;

(e) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+\arctan x}$; (f) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}dx$;

(g) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$; (h) $\int\limits_{0}^{1} \ln \mid 1-4\sin^2 x \mid dx$.

Cevap: (b), $(d), (e), (f), (g), (h)$ yakınsak, $(a), (c)$ ıraksaktır.

(22) Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p değerlerini bulunuz.

(a) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{px}dx$; (b) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln x}$;

(c) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}dx$; (d) $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{p})dx,\ (p \neq 0)$;

(e) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{e^{px}dx}{(x-1)^p \ln x}$; (f) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{x^p}dx$;

(g) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^{-2p})}{\sqrt{x^p+x^{-p}}}dx,\ (p>0)$; (h) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{(x+p)^2}dx$;

(i) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\frac{4p}{3}} \arctan(\frac{\sqrt{x}}{1+x^p})dx,$ $(p>0)$.

Cevap: (a) $p > 0$; (b) $p > 1$; (c) $p > 1$; (d) $\forall p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için ıraksaktır. (e) $p < 0$; (f) $1 < p < 2$; (g) $p > \frac{2}{3}$; (h) $p \geq 0$; (i) $-\frac{9}{2} < p < -\frac{3}{4}$.

(23) Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p değerlerini bulunuz.

(a) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^p} dx$; (b) $\int\limits_0^1 e^{\frac{p}{x}} (\cos x)^{\frac{1}{x^3}} dx$;

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln x}{x^p \tan x} dx$; (d) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln \tan x}{(4x\cos x - \pi \sin x)^p} dx,$;

(e) $\int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^p \ln(2+x) dx$; (f) $\int\limits_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p} dx$;

(g) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln \mid x-p \mid},$; (h) $\int\limits_0^1 e^{\frac{x^2}{(x-p)}} dx$.

Cevap: (a) $p < 3$; (b) $p \leq \frac{1}{2}$; (c) $p < 4$; (d) $p < 1$; (e) $p > -2$; (f) $p < 2$; (g) $p < -1, 0 < p < 1, p > 2$; (h) $p \leq 0, p \geq 1$.

(24) Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p ve q değerlerini bulunuz.

(a) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^p x}$; (b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan^p x dx}{(x^2+2)(e^x-1)^q}$;

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx$; (d) $\int\limits_0^1 x^p (1-x)^q \ln x dx,$.

Cevap: (a) $p > 1,\ q \in \mathbb{R}$ ve $p = 1,\ q > 1$ (b) $q - p < 1,\ q \geq 0$; (c) $p > -1,\ q > -1$; (d) $p > -1,\ q > -2$.

(25) Aşağıdaki integrallerin mutlak veya koşullu yakınsak olup olmadığını araştırınız.

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\cos 7x}{x^2+2x+2}dx$; (b) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(\sin\ln x)}{x}dx$;

(c) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\sin\left(\dfrac{\cos^3 x}{x+1}\right)dx$; (d) $\int\limits_1^{+\infty} \arctan\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

(e) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{\cos x}\sin(\sin x)}{x}dx$; (f) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{(2x-\cos\ln x)^p}dx$;

(g) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{(\ln(x+1)-\ln x)^p}dx$; (h) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx$;

(i) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin(\ln x)}{x^p}\sin x dx$; (j) $\int\limits_\pi^{+\infty} \dfrac{p-\mid\cos x\mid}{\pi+x}dx$.

Cevap: (a) Koşullu yakınsaktır ; (b) ıraksaktır ;
(c) koşullu yakınsaktır ; (d) koşullu yakınsaktır ;

(e) koşullu yakınsaktır;
(f) $p>1$ için mutlak, $0<p\leq 1$ için koşullu yakınsaktır ;
(g) $p<-1$ için mutlak, $-1\leq p<0$ için koşullu yakınsaktır;
(h) $p>1$ için mutlak, $-1<p\leq 1$ için koşullu yakınsaktır ;
(i) $p>1$ için mutlak, $0<p\leq 1$ için koşullu yakınsaktır ;
(j) $p=\dfrac{2}{\pi}$ için koşullu yakınsaktır.

(26) Aşağıdaki integrallerin mutlak veya koşullu yakınsak olup olmadığını araştırınız.

(a) $\int\limits_0^1 (1-x)^p\sin\left(\dfrac{\pi}{1-x}\right)dx$; (b) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^\alpha}{1+x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$;

(c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^p\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)dx$; (d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)\dfrac{dx}{\sin^p x}$;

(e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\dfrac{dx}{(1-x^2)^p}$; (f) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin(x)^p}{x^2}dx$;

(g) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(\sqrt{x}-x)^p}dx$; (h) $\int\limits_0^1 \dfrac{(1-x)^p}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$.

Cevap: (a) $p>-1$ için mutlak, $-2<p\leq -1$ için koşullu yakınsaktır;
(b) $p>-1$ için mutlak, $-2<p\leq -1$ için koşullu yakınsaktır ;

(c) $p > -1$ için mutlak, $-3 < p \leq -1$ için koşullu yakınsaktır ;
(d) $p < 1$ için mutlak, $1 \leq p < 2$ için koşullu yakınsaktır ;
(e) $p < 1$ için mutlak, $1 \leq p < 2$ için koşullu yakınsaktır ;
(f) $p > 1$ için mutlak, $p < -1$ için koşullu yakınsaktır ;
(g) $p < 1$ için mutlak yakınsak, $p \geq 1$ için koşullu ıraksaktır ;
(h) $p > -1$ için mutlak yakınsak, $p \leq -1$ için koşullu ıraksaktır .

(27) Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu ispatlayınız.

f, $[a, +\infty)$ üzerinde tanımlı ve $\omega > 0$ periyotlu bir fonksiyon, g ise $[a, +\infty)$ üzerinde monoton ve $x \to +\infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda :

(a) Eğer, Riemann anlamında $\int\limits_a^{\omega+a} f(x)dx = 0$ ise $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ integrali yakınsaktır,

(b) Eğer, $\int\limits_a^{\omega+a} f(x)dx \neq 0$ ise $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ ve $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallerinin karakterleri aynıdır.

Bu önermeden yararlanarak, aşağıdaki integrallerin yakınsak olduklarını gösteriniz.

(c) $\int\limits_0^{+\infty} e^{\cos x}\sin(\sin x)\dfrac{dx}{x}$; (d) $\int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x}\sin(\sin x)\dfrac{dx}{x}$.

(28) Sol taraftaki integrallerin yakınsaklık durumunda aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu ispatlayınız.

(a) $\int\limits_0^{+\infty} f\left(px + \dfrac{q}{x}\right)dx = \dfrac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4pq})dx,\ (p > 0, q > 0)$;

(b) $\int\limits_0^{+\infty} f(x^2)dx = p\int\limits_0^{+\infty} f(p^2x^2 - 2pq + \dfrac{q^2}{x^2})dx,\ (p > 0, q > 0)$

(c) $\int\limits_0^{+\infty} f\left(\dfrac{x}{p} + \dfrac{p}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}dx = \ln p\int\limits_0^{+\infty} f\left(\dfrac{x}{p} + \dfrac{p}{x}\right)dx,\ (p > 0)$;

(d) $\int\limits_0^{+\infty} f\left(x^p + \dfrac{1}{x^p}\right)\dfrac{\ln x}{x}dx = 0,\ (p \neq 0)$.

(29) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\sin^n x dx,\ p > 0$ integrali için

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+p^2}.I_{n-2},\ n = 2, 3, \cdots$$

indirgeme formülünün doğru olduğunu gösteriniz.

(30) $a > 0$ ve $b > 0$ için aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx$; (b) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}$;

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos ax}{x}\cos bx dx$; (d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2} dx$;

(e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx$; (f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2} dx$;

(g) $\int\limits_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx})^2 \frac{dx}{x^2}$.

Cevap: (a) 0 ; (b) $-\frac{1}{2}\ln 2$; (c) $\ln\left(\frac{\sqrt{|\,a^2-b^2\,|}}{b}\right)$; (d) $b - a + a\ln\frac{a}{b}$; (e) $\frac{3}{8}\ln\frac{a}{b}$; (f) $ab\ln\frac{b}{a}$; (g) $2b\ln\frac{2b}{a+b} + 2a\ln\frac{2a}{a+b}$.

(31) $a > 0,\ b > 0,\ n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n} ax - \sin^{2n} bx}{x} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ln\frac{b}{a}$;

(b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n+1} ax - \cos^{2n+1} bx}{x} dx = \ln\frac{b}{a}$;

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} ax - \cos^{2n} bx}{x} dx = \left(1 - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)\ln\frac{b}{a}$;

(d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax\cos bx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b < a \text{ ise,} \\ \frac{\pi}{4}, & b = a \text{ ise,} \\ 0, & b > a \text{ ise} \end{cases}$;

(e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax\sin bx}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}b, & b \le a \text{ ise,} \\ \frac{\pi}{2}a, & b \ge a \text{ ise} \end{cases}$.

(32) Aşağıdaki integrallerin, eğer varsa, Cauchy anlamında esas değerlerini bulunuz.

(a) $E.d.\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1-x^3}$; (b) $E.d.\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1+x}{1+x^2}dx$;

(c) $E.d.\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-4x+3}$; (d) $E.d.\int\limits_{-1}^{7}\dfrac{dx}{(x-1)^3}$;

(e) $E.d.\int\limits_a^{b}\dfrac{dx}{(x-c)^n}$ $(c\in(a,b),n\in\mathbb{N})$; (f) $E.d.\int\limits_0^{\pi}x\tan x dx$;

(g) $E.d.\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{a-b\cos x}$, $(0<a<b)$; (h) $E.d.\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{xdx}{1-a\cos x}$ $(a>1)$;

(i) $E.d.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{a-\sin x}$ $(0<a<1)$.

Cevap: (a) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$; (b) π ; (c) $-\ln\sqrt{3}$; (d) $\dfrac{1}{9}$; (e) $n=1$ için $\ln\dfrac{b-c}{c-a}$, $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{n-1}\Big((a-c)^{-n}-(b-c)^{1-n}\Big)$, $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$ için integral mevcut değildir ; (f) $-\pi\ln 2$; (g) $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}$; (h) 0 ; (i) $\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ln\dfrac{b-\sqrt{1-a^2}}{a}$.

(33) $x>1$ için

$$E.d.\int\limits_0^{x}\frac{dt}{\ln t}$$

mevcut olduğunu gösteriniz.

(34) $p,a\in\mathbb{R}$ için

$$E.d.\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin px}{x^2-a^2}dx=\cos pa\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin px}{x}dx$$

eşitliğinin doğruluğunu ispatlayınız.